

Polynômes de Lagrange

Kylian Prigent

15 juillet 2024

Le corps \mathbf{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

THÉORÈME DE LAGRANGE

Soit n un entier naturel. Soient a_0, a_1, \dots, a_n des points de \mathbf{K} distincts et soient b_0, b_1, \dots, b_n des éléments de \mathbf{K} . Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ (de degré inférieur ou égal à n) tel que pour i allant de 0 à n on ait $P(a_i) = b_i$.

PREUVE DU THÉORÈME DE LAGRANGE

On considère l'application

$$\nu : \begin{cases} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, (a_n)) \end{cases}$$

Cette application est clairement linéaire. Vérifions qu'elle est injective.

Soit $P \in \ker \nu$. Alors le polynôme P est de degré au plus n et possède $n + 1$ racines (les a_i). Donc il s'agit du polynôme nul. D'où l'application linéaire ν est injective.

Étant linéaire injective entre deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de même dimension finie $n + 1$, cette application est alors un isomorphisme.

Donc il existe un unique polynôme valant b_i en a_i pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Pour déterminer explicitement le polynôme d'interpolation, il suffit donc de déterminer l'image réciproque de la base canonique par l'application ν . Il s'agit des polynômes de Lagrange que l'on va exhiber.

En effet, on considère (e_0, e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{K}^{n+1} . On pose $L_i = \nu^{-1}(e_i)$. Alors pour $j = 0, \dots, n$ et $j \neq i$, on a $L_i(a_j) = 0$. Comme les L_i sont non nuls, de degré au plus n et admettent n racines, ils s'écrivent :

$$L_i = c \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (X - a_j).$$

Mais $L_i(a_i) = \nu(L_i)[i] = e_i[i] = 1$. On déduit donc que

$$c = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

Au total, on a donc :

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

pour i allant de 0 à n . Ces polynômes sont appelés polynômes de Lagrange. Ils forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Donc le polynôme recherché est :

$$P = \sum_{i=0}^n b_i L_i.$$

Connaissant ces polynômes de Lagrange, on peut aussi directement montrer l'existence et l'unicité énoncées dans le théorème.

Ici f désigne une fonction valant b_i en tous les a_i .

Existence : Soit P le polynôme défini par

$$P = \sum_{i=0}^n f(a_i) L_i = \sum_{i=0}^n b_i L_i.$$

Alors ce polynôme coïncide avec f en tous les a_j . En effet :

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j)$$

or on voit immédiatement que

$$L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j) = b_i L_i(a_i) = b_i.$$

Et $\deg P \leq n$.

Unicité : Soit \tilde{P} un autre polynôme de degré au plus n coïncidant avec f en les a_i .

Alors $P - \tilde{P}$ est un polynôme de degré au plus n avec au moins $n + 1$ racines (les a_i). Donc $P - \tilde{P}$ est le polynôme nul.